



ち え の わ

Vol. 24

# ナビエ・ストークス方程式

会員 堀 城之

序

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{1}{3} \nu \text{grad} \theta + \nu \Delta \mathbf{v}$$

これが、ナビエ・ストークス方程式である。主に流体力学において用いられる。土木工学，建築工学，機械工学，航空工学，船舶工学，物理学を履修した方は学んだかもしれない。流体に係る発明も少なくないであろう。しかし，大学院の流体研究室或いは，当該数学研究室に入らない限り圧縮項（右辺第3項）までは導かないと思われる。そこで，本稿ではナビエ・ストークス方程式について圧縮項まで含めて説明する。なお，特別な境界条件の場合を除いて未だに誰も解けていない方程式である。

## 1. ナビエ・ストークス方程式の生みの親

土木技術者であったアンリ・ナビエが粘性を考慮した方程式を記載した論文を1822年にフランス学士院に提出した。

しかし，技術者の論文は無視されるのはいつの時代でも世の常で，提出から20年以上経過した1845年に物理数学者のストークスがナビエとは別個に粘性流体方程式を導いた。

そこで，二人の名前をつけてナビエ・ストークス方程式とした。ナビエとストークスとの間に“・”が付いているのはその為である。第一発見者の名前をとってナビエ方程式の方が正しいような気がする。因みにナビエは，その後，エリート養成学校であるエコール・ポリテクニークの教授になっている。



アンリ・ナビエ from Wikipedia

## 2. ナビエ・ストークス方程式が導かれた理由

—ダランベールの背理—

右辺第3項（圧縮項）及び第4項（粘性項）を除いた式は，オイラーの運動方程式である。この方程式は，ナビエ・ストークス方程式の約100年前に，あの大数学者オイラーによって，ニュートンの第2法則から導かれた。

ここで，問題です。感覚的に分かってもらえばよいので，細かい条件等は抜きにして大雑把に書きます。

Q：一様に定常的な“流れるプール”にあなたが飛び込んでプールの底に立つとする。あなたは水平方向にどのような力を受けますか？

あなたはこう答えるでしょう。

A：下流に流される力を受ける。流れが強いと下流に流される。

答えは×です。

オイラーの運動方程式に支配される流れでは，あなたは下流方向への力を受けない。無風状態で打たれたゴルフボールは，重力以外に力を受けず空气中を飛んでいくのである。

非常に奇妙な話である。あなたも流れるプールや川で流されたかもしれない。流体中に存在するものは上流から下流に流されるように力を受けることを感覚的に理解している。ゴルフをやる人なら流体抵抗が無かったらどんなに楽なことかと思うかもしれない。

しかし，オイラーの運動方程式で扱う流体では下流方向に流される力を受けないのである。オイラーの運動方程式に支配される流体を完全流体という。

そして，このパラドックスをダランベールの背理という。

当該パラドックスを解くために考え出されたのが，ナビエ・ストークス方程式なのである。ナビエは，土木橋梁技術者であり，橋脚に受ける力を研究した結果，ナビエ・ストークス方程式を導き出した。

### 3. ナビエ・ストークス方程式の導出

ナビエ・ストークス方程式自体を導くことはそれほど難しくはない。高校の数学、物理の知識があれば導くことが出来る。

#### (1) オイラーの運動方程式

まず、ナビエ・ストークス方程式の圧縮項（筆者が勝手に名付けた。学部・学科で名称が異なるようである）及び粘性項（右辺第4項）が無い方程式を導く。当該方程式をオイラーの運動方程式という。

$$\frac{Dv}{Dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad}p \quad \text{grad} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

オイラーの運動方程式は、右辺は単位質量当たりの力、左辺は質量力と圧力である。

ゆえに、オイラーの運動方程式は、ニュートンの第2法則  $\mathbf{F} = \mathbf{M}\mathbf{a}$  から導くことが出来る。

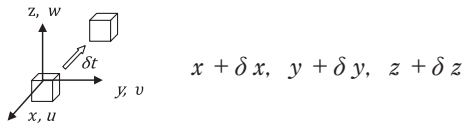


図1

図1に示す、流体中における微少流体  $\square$  の速度成分は、場所と時間の関数、

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, z, t) \\ v &= v(x, y, z, t) \\ w &= w(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (1)$$

代表される。

$\delta t$  時間経過後の移動距離は、

$$\begin{aligned} \delta x &= u(x, y, z, t) \delta t \\ \delta y &= v(x, y, z, t) \delta t \\ \delta z &= w(x, y, z, t) \delta t \end{aligned} \quad (2)$$

座標は、

$$\begin{aligned} x + \delta x \\ y + \delta y \\ z + \delta z \end{aligned} \quad (3)$$

③を①に代入すると、

$$\begin{aligned} u &= u(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t + \delta t) \\ v &= v(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t + \delta t) \\ w &= w(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t + \delta t) \end{aligned} \quad (4)$$

微少時間経過後の速度の変化量を  $\delta u$  として、④を以下のように書き換える。

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) + \delta u \\ v(x, y, z, t) + \delta v \end{aligned}$$

$$w(x, y, z, t) + \delta w \quad (5)$$

⑤を多変数テイラー展開（※）すると、

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) + \delta u &= u(x, y, z, t) + \left( \frac{\partial}{\partial x} \delta x + \frac{\partial}{\partial y} \delta y + \frac{\partial}{\partial z} \delta z + \frac{\partial}{\partial t} \delta t \right) u(x, y, z, t) \\ &+ \left( \frac{\partial}{\partial x} \delta x + \frac{\partial}{\partial y} \delta y + \frac{\partial}{\partial z} \delta z + \frac{\partial}{\partial t} \delta t \right)^2 u(x, y, z, t) + 3 \text{ 乗} + \dots, \dots + n \text{ 乗} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x, y, z, t) + \delta v &= v(x, y, z, t) + \left( \frac{\partial}{\partial x} \delta x + \frac{\partial}{\partial y} \delta y + \frac{\partial}{\partial z} \delta z + \frac{\partial}{\partial t} \delta t \right) v(x, y, z, t) \\ &+ \left( \frac{\partial}{\partial x} \delta x + \frac{\partial}{\partial y} \delta y + \frac{\partial}{\partial z} \delta z + \frac{\partial}{\partial t} \delta t \right)^2 v(x, y, z, t) + 3 \text{ 乗} + \dots, \dots + n \text{ 乗} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(x, y, z, t) + \delta w &= w(x, y, z, t) + \left( \frac{\partial}{\partial x} \delta x + \frac{\partial}{\partial y} \delta y + \frac{\partial}{\partial z} \delta z + \frac{\partial}{\partial t} \delta t \right) w(x, y, z, t) \\ &+ \left( \frac{\partial}{\partial x} \delta x + \frac{\partial}{\partial y} \delta y + \frac{\partial}{\partial z} \delta z + \frac{\partial}{\partial t} \delta t \right)^2 w(x, y, z, t) + 3 \text{ 乗} + \dots + n \text{ 乗} \end{aligned}$$

影響が小さい高次項を無視し、②を代入すると、

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) + \delta u &= u(x, y, z, t) + \left( \frac{\partial u}{\partial x} u \delta t + \frac{\partial u}{\partial y} v \delta t + \frac{\partial u}{\partial z} w \delta t + \frac{\partial u}{\partial t} \delta t \right) \\ v(x, y, z, t) + \delta v &= v(x, y, z, t) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} u \delta t + \frac{\partial v}{\partial y} v \delta t + \frac{\partial v}{\partial z} w \delta t + \frac{\partial v}{\partial t} \delta t \right) \\ w(x, y, z, t) + \delta w &= w(x, y, z, t) + \left( \frac{\partial w}{\partial x} u \delta t + \frac{\partial w}{\partial y} v \delta t + \frac{\partial w}{\partial z} w \delta t + \frac{\partial w}{\partial t} \delta t \right) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta u}{\delta t} \text{ として⑥を整理すると,} \\ \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w \end{aligned} \quad (7)$$

左辺を見れば分かるように、所謂、加速度である。

$\frac{\partial u}{\partial t}$  を時間的加速度、  
 $\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w$  を場所的加速度、という。

前者は理解できると思うが、後者がなぜ加速度と思うかもしれない。つまり場所で微分してなぜ加速度なのかと思うかもしれない。場所的加速度は、ある場所から他の場所に移動したときの速度の変化率（加速度）だと考えて頂ければよい。以上で加速度が求められた。つまり、オイラー方程式の左辺である。

次に、右辺、すなわち、力について考える。

完全流体に加わる力は、質量力と圧力のみである。質量力は、流体力学の本に出てくる用語なのだが、筆者が訳すと慣性力となる。

流体中に微少な立方体を考える。

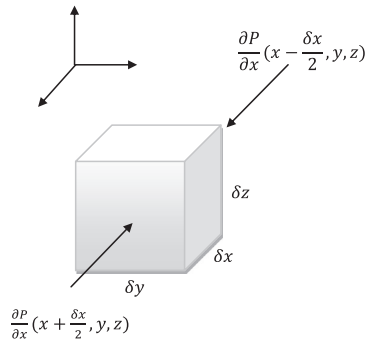


図 2

図 2 に示す立方体の質量は、 $\rho \delta x \delta y \delta z$  である。

各面に加わる単位重量当たりの力を  $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$

とすると、質量力 =  $F \rho \delta x \delta y \delta z = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \rho \delta x \delta y \delta z$  ⑧

となる。

次に、微少流体の中心を  $(x, y, z)$  とすると、微少流体に作用する圧力は、例えば  $x$  軸に垂直な面に作用する圧力差であるから、

$$\left\{ \frac{\partial P}{\partial x} \left( x + \frac{dx}{2}, y, z \right) - \frac{\partial P}{\partial x} \left( x - \frac{dx}{2}, y, z \right) \right\} \delta y \delta z = - \frac{\partial P}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \quad ⑨$$

他の 2 面に作用する圧力も同様に求めると、

$$- \frac{\partial P}{\partial y} \delta x \delta y \delta z, \quad - \frac{\partial P}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \quad ⑩, \quad ⑪$$

⑦～⑨をニュートンの第 2 法則に代入し、質量で除

せば

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w + \frac{\partial u}{\partial t} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w + \frac{\partial v}{\partial t} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w + \frac{\partial w}{\partial t} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$

微分演算子  $\frac{D}{Dt} (= \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v + \frac{\partial}{\partial z} w + \frac{\partial}{\partial t})$  を用

いて書き換えると、

$$\frac{Du}{Dt} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{Dv}{Dt} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{Dw}{Dt} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

grad を用いて記載し直せば、

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p$$

これで、オイラーの運動方程式が導けた。

## (2) 粘性流体における基礎方程式

—圧縮項  $\frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho} \text{grad} \theta$ , 粘性項  $\nu \Delta v$  のオイラー運動方程式への導入—

ダランベールの背理が生じるのは粘性を考慮していないからである。また、圧縮性も考慮されていない。因みに、水は非圧縮性流体である。

## ① 粘性係数 $\mu$

剪断係数  $\tau$  との関係は、

$$\tau = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

で表される。これをニュートンの摩擦法則という (ニュートンの粘性法則ともいう)。

## ② 応力テンソル

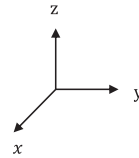


図 3

$\sigma$  は着目面に垂直に作用する応力 (材料力学で言えば面外応力),  $\tau$  は着目面に作用する剪断応力 (同面内応力) である。最初の添え字は着目面を, 2 番目のそれは作用方向を示す。

以上を行列で表したものが応力テンソル (略) である。

この図をしっかりと覚えて頂ければ終わったようなものです。

着面に作用する剪断応力は、係る 2 つの剪断応力の和で表されるので、ニュートンの粘性法則から、

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad ⑫$$

また、着面に作用する面外応力は、圧力と、係る 2 つの剪断応力の和と、圧力による歪みの項との和で表されるので、

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \theta$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \theta$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \theta \quad ⑬$$

$\mu$  を第 1 粘性係数,  $\lambda$  を第 2 粘性係数という。

$$\theta = \text{div} \mathbf{v} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

非圧縮性流体では歪み 0 故,  $\theta = 0$  となる。

次いで、式⑫, ⑬を使って、図 3 に示す立方体に働く力を考える。

$x$  軸方向の“力”は対面の差で表されるから

$x$  面では

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \delta x \cdot \delta y \delta z$$

$y$  面では

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \delta y \cdot \delta x \delta z$$

$z$  面では

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \delta z \cdot \delta x \delta y$$

であり、これらの総和を単位質量で表すと、

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \quad (14)$$

となる。

(14)を3. (1) で求めたオイラーの運動方程式に代入する

$$\frac{Du}{Dt} = F_x - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \quad (15)$$

となる。

圧力項が消えていると思われるかもしれないが、式(13)にあるように、 $\sigma$ の中に入っている。

式(15)に式(12)、(13)の当該式を代入してやれば、

$$\frac{Du}{Dt} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3} v \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$\therefore v = \frac{\mu}{\rho}$   $v$ : 動粘性係数

$y$  面、 $z$  面も同様に求めると、

$$\frac{Dv}{Dt} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{3} v \frac{\partial \theta}{\partial y} + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{3} v \frac{\partial \theta}{\partial z} + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

となる。

これらの式を grad,  $\Delta$  を用いて表すと

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{1}{3} v \text{grad} \theta + v \Delta \mathbf{u}$$

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

非圧縮性流体では、

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + v \Delta \mathbf{u}$$

となる。

※多変数テイラー展開

$$f(x^\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [(x^\mu - \alpha^\mu) \partial_\mu]^n f(\alpha^\mu) \quad \text{from Wikipedia}$$

イギリスの数学者ブルック・テイラーが導入した級数式である。ある関数の1点から少し離れたところの値を級数を使って真値に近づけるものである。高校の授業で1変数テイラー展開(マクローリン展開(a=0))を使って円周率や三角関数を単純な数の和として求めた方もいるかもしれない。

工学、物理で用いられる便利な式である。重要なので3次元の場合を導く。

ナビエ・ストークス方程式は3次元なので3変数場合は、関数 $f(x, y, z)$ を座標 a, b, c 周りでテイラー展開

すると、

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + j \frac{\partial}{\partial z} \right)^n f(a, b, c) \\ &= f(a, b, c) \\ &+ \frac{1}{1!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + j \frac{\partial}{\partial z} \right)^1 f(a, b, c) \\ &+ \frac{1}{2!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + j \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f(a, b, c) \\ &+ \frac{1}{3!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + j \frac{\partial}{\partial z} \right)^3 f(a, b, c) \\ &+ \dots \\ &+ \frac{1}{n!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + j \frac{\partial}{\partial z} \right)^n f(a, b, c) \\ &+ R_{n+1} \\ R_{n+1} &= \frac{1}{(n-1)!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + j \frac{\partial}{\partial z} \right)^{n+1} f(a + \theta h, \\ & \quad b + \theta k, c + \theta j) \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned}$$

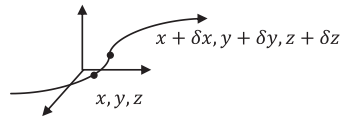
: 多変数ラグランジュ剰余項

となる。

ここで、

$$x = a + ht, \quad y = b + kt, \quad z = c + jt$$

つまり、流線上の1点 $x, y, z$ から微少時間 $\delta t$ 経過(微小変化)した場合(故に1次)の予測値(座標)を表している( $f(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z) = f(x, y, z) + \delta f(x, y, z)$ )。



—導出—

関数 $f(x, y, z)$ の座標 $f(a, b, c)$ における $x, y, z$ 軸方向の傾きに単位時間当たりの各軸方向における変化量をそれぞれ掛けてやれば変化量 $\delta f(x, y, z)$ が出てくるから

$$\delta f(x, y, z) \equiv dW = \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + j \frac{\partial}{\partial z} \right) dt$$

$$\therefore f(x, y, z) + \delta f(x, y, z) = f(a, b, c) + \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + j \frac{\partial}{\partial z} \right) f(a, b, c)$$

$\left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + j \frac{\partial}{\partial z} \right)$ の偏微分係数も変化するので、それを考慮すると $\delta t$ 時間経過後の偏微分係数の変化量は、

$$\delta \left( \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \right) = \left( \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2} \right) \delta t + \left( \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x \partial y} \right) \delta t + \left( \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x \partial z} \right) \delta t$$

$$\delta \left( \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \right) = \left( \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y^2} \right) \delta t + \left( \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x \partial y} \right) \delta t + \left( \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y \partial z} \right) \delta t$$

$$\delta \left( \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial z^2} \right) \delta t + \left( \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial z \partial y} \right) \delta t + \left( \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x \partial z} \right) \delta t$$

$$x, y, z \quad \frac{\delta t}{2} \quad \frac{\delta t}{2}$$

$\delta t$ を二つに分割すると、前半の $\frac{\delta t}{2}$ 後の変化量は、

$$\frac{1}{1!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + j \frac{\partial}{\partial z} \right)^1 f(a, b, c) \frac{\delta t}{2}$$

後半の $\frac{\delta t}{2}$ 後の変化量は、

$$\left[ \frac{1}{n!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + j \frac{\partial}{\partial z} \right)^n + \delta \left( \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \right) + \delta \left( \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \right) + \delta \left( \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \right) \right] \frac{\delta t}{2} f(a, b, c) =$$

$$\left[ \frac{1}{n!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + j \frac{\partial}{\partial z} \right)^n + \left( \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x \partial y} \right) + \left( \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x \partial z} \right) + \left( \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y \partial z} \right) + \left( \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial z^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial z \partial y} \right) + \left( \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x \partial z} \right) \right] \frac{\delta t}{2} f(a, b, c)$$

$\delta t$  時間経過後の変化量は、前半と後半との和で表されるから、

$$\delta t \delta f(x, y, z) = \frac{1}{n!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + j \frac{\partial}{\partial z} \right)^n f(a, b, c) \frac{\delta t}{2}$$

$$+ \frac{1}{n!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + j \frac{\partial}{\partial z} \right)^n \frac{\delta t}{2} f(a, b, c)$$

$$+ \left[ \left( \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial z^2} \right) \right]$$

$$+ 2 \left( \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x \partial y} \right) + 2 \left( \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y \partial z} \right)$$

$$+ 2 \left( \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x \partial z} \right) \left] \frac{\delta t}{2} f(a, b, c)$$

$$\delta t \delta f(x, y, z) = \frac{1}{n!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + j \frac{\partial}{\partial z} \right)^n f(a, b, c) \delta t$$

$$+ \left[ \left( \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \right) \right] \frac{\delta t}{2} f(a, b, c)$$

$$\therefore \delta f(x, y, z) = \frac{1}{n!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + j \frac{\partial}{\partial z} \right)^n f(a, b, c)$$

$$+ \frac{1}{2!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + j \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f(a, b, c)$$

$$\therefore f(x, y, z) + \delta f(x, y, z) = f(a, b, c) + \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + j \frac{\partial}{\partial z} \right) f(a, b, c) + \frac{1}{2!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + j \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f(a, b, c)$$

$n = 0, 1, 2$  についての導出終わり。高次項は無視されるのでこれで打ち止め。

なお、ラグランジュ剰余項を含めて、ロルの定理等でテイラー級数を導入することが出来る。

*Fin*

#### 4. 賞金 \$ 100 万ドル

ナビエ・ストークス方程式は、上記の通り、2階非線形偏微分方程式である。

以前、特許に記載した振動方程式は2階非線形偏微分方程式であり（線材は4階）、ナビエ・ストークス方程式と同じである。断面変化等の場合を除き、時間微分のみである。ナビエ・ストークス方程式では時間微分と場所微分とが混在している。よって、振動方程式よりも解きにくい。

特定の条件下で境界条件を設定して解くことは可能である。振動方程式では減衰を無視すれば2階線形偏微分方程式となり解くことが出来る。ナビエ・ストークス方程式では、例えばマッハのような高速流体で且

つ非圧縮性であれば粘性項及び圧縮項を無視できるので1階線形微分方程式となり解くことは可能である。

しかし、上記の如き特定の場合を除き、数学的には、厳密解が求められていない。求めることができるのかも分かっていない。

そこで、CMI（クレイ数学研究所）は賞金を懸けている。

<http://www.claymath.org/millennium/>

CMIは、解けないという証明をしても賞金をもらえるそうである。

ところで、CMIは、2006年にポアンカレ予想を証明できたとして、グリゴリー・ヤコヴレヴィチ・ペレルマンに賞金を出した（本人は受け取り拒否）。先日NHKで「数学者はキノコ狩りの夢を見る」という題名で放送していたので見た方もいるかもしれない。なお、見逃した人は、オンデマンドで見ることが出来る。

<http://www.nhk-on δ eman δ .jp/>

ポアンカレ予想とは、位相幾何学の問題で、紐の基端を手で持ち先端をロケットに結びつけて飛ばし、宇宙の隅々まで飛行し地球に帰還した後、紐の基端と先端とをたぐり寄せると紐の全てを回収できるという予想である（星はツルツルで紐は星に引っかからない。紐は燃えない、切れない）。ペレルマンの論文は、例えば、Cornel University Libraryでダウンロードすることが出来る。

<http://arxiv.org/pdf/math/0211159v1.pdf>

<http://arxiv.org/pdf/math/0303109v1.pdf>

<http://arxiv.org/pdf/math/0307245v1.pdf>

ペレルマンは、ウィリアム・サーストンの幾何化予想を、微分幾何学に物理工学的アプローチも加えて解き、ポアンカレ予想を解明した。サーストンの幾何化予想とは、宇宙では最大8つの図形に分類されるというものである。

ナビエ・ストークス方程式も純粋に数学的アプローチではなく、他のアプローチにより解けるかもしれない。たとえば、生みの親であるナビエが土木技術者だから土木工学的アプローチも面白そうである。土木工学的に、流体を類型化し、それぞれ圧縮項、粘性項が0とならない境界条件を定めてプロットしていくと、解法のヒントが見つかるかもしれない。

以上

参考書：日野幹雄著「流体力学」株式会社朝倉書店  
本間 仁著「標準水理学」丸善株式会社